Análisis 1 - Alimentos - 1° cuatrimestre 2021 (virtual)

Práctica 4

Funciones: límite y derivadas

1. Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\operatorname{sen}x}{e^x+\cos x}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x}}{\ln(|x|)}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}x$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$ *f)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\tan x}$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ *i)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=+\infty$. Probar $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\ln(f(x,y))}{f(x,y)}=0$.

3. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ *d)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2y^2)$.

4. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x,y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$

a) $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$; *b)* $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$;

c) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$; *d)* $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-y)y}{x^4} & \text{si } 0<y<x^2;\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$

5. Probar que la función $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}$ no tiene límite cuando $(x,y)\to(0,0)$. *Sugerencia:* ver primero que por los ejes el límite es 0. Luego considerar la curva por el origen $y=\dfrac{x}{x+1}$ y calcular el límite de f en $(0,0)$ a lo largo de esta curva.

6. Analizar la existencia de los límites de las siguientes funciones en el origen:

a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$; *b)* $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{y}$; *d)* $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{xy+y-x}$

e) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; *f)* $f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

7. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $P = (1,0)$ y luego en $Q = (0,0)$;

b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$;

8. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} + \dfrac{1}{x^2-y^2-1} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \qquad\qquad 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   a) Hallar el dominio de f y graficarlo.

   b) Decidir si f es continua en $P = (0,0)$

9. Sea $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{\ln(1-x^2)}$

   a) Encontrar el dominio D de f y graficarlo.

   b) Dado $q = (q_1, q_2) \in bd(D)$, ¿existe $\lim\limits_{(x,y)\to(q_1,q_2)} f(x,y)$?

10. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = \left(x^2,\ e^x\right) \qquad\qquad \text{(b)} \quad f(x,y) = \left(\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, \ \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \right)$$

11. Sea $B = B_1(0) = \{x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

   a) Sea $f : B \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1 - \|x\|}$. Probar que f es continua y no es acotada.

   b) Sea $g : B \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

Teoremas de Bolzano, Rolle y Lagrange en $\mathbb{R}$

12. a) Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x)^2 - e^x = 0$.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im}(f) = [a,b] \cup [c,d]$ con $a < b < c < d$. ¿Es f continua?

   c) Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.

   d) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

13. a) Sea f un polinomio con al menos k raíces distintas, probar que f' tiene al menos $k-1$ raíces distintas.

   b) Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.

   c) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{a^2 x} + x^3 + x$ si $x \in \mathbb{R}$. Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

14. Como una consecuencia del Teorema de Lagrange, mostrar que son válidas las siguientes acotaciones

a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| \leq |x - y|$, para $x, y > 1$.

c) $|\arctan a - \arctan b| \leq \dfrac{1}{2}|a - b|$, para $a, b \geq 1$.

Derivadas parciales y direccionales

15. Calcular las funciones derivadas parciales y los vectores gradientes de las siguientes funciones en su dominio:

    a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$

    b) $f(x,y,z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$

    c) $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}^2(y)$

    d) $f(x,y) = \operatorname{sen} x$

    e) $f(x,y,z) = ye^x + z$

    f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

    g) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

    h) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$

    i) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$

    j) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

16. Probar que la función $f(x,y) = |x|+|y|$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

17. Hallar la ecucación del plano tangente de cada una de las funciones del ejercicio 15 (con excepción de los ítems *g*)*h*)*j*)) en el punto $P = \mathbb{O}$.

18. Calcular la ecuación del plano tangente a $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ en $P = (1,1)$.

19. Usando la expresión del plano tangente para $f(x,y) = xe^y$, aproximar $0,99e^{0,02}$.

20. Para cada una de las siguientes funciones $f(x,y)$, calcular la derivada direccional en la dirección de v en el punto (x_0, y_0)

    a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\quad v = (1,0)$, $(x_0,y_0) = (1,2)$ y $v = (0,1)$, $(x_0,y_0) = (1,2)$.

    b) $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2)$, $\quad v = (0,1,0)$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,2)$.

    c) $f(x,y) = (x+1)\operatorname{sen} y - 2$, $\quad v = (1,0)$, (x_0,y_0) cualquiera.

    d) $f(x,y) = \|(x,y)\|$, $\quad v = (a,b)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$ con $\|(a,b)\| \neq 0$.

21. Consideremos la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector $v \in \mathbb{R}^2$. Probar que f **no** es continua en el origen.

22. Sea $f; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

b) Mostrar que f es continua en $(0,0)$ y que no es C^1.

23. Sea f de clase C^1 tal que $f(1,2) = 3$, y sean además los vectores $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial v_1}(1,2) = 3$ y que $\frac{\partial f}{\partial v_2}(1,2) = 4$.

    a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

    b) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(1,2,f(1,2))$.

Interpretación del gradiente

24. Encontrar la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1,1)$. ¿Cuál es la magnitud $\|\nabla z\|$ en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.

25. Supongamos que la función $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x,y). Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano xy son iguales a $(1,0)$. '?En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?

26. a) Mostrar que si $\nabla f(P) \neq 0$ entonces $-\nabla f(P)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

    b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función

    $$f(x,y) = 10 + 6\cos(x)\cos(y) + 4\cos(3y)$$

    En el punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

27. Dada la función $f(x,y) = x^3 - xy^2 + y^4$, verificar cada una de las siguientes afirmaciones:

    a) f crece en la dirección $(0,1)$ desde el punto $(1,1)$.

    b) Desde el punto $(1,1)$ el mayor crecimiento de f se da en la dirección $(2,2)$.

    c) Desde el punto $(1,1)$, f decrece si nos movemos en la dirección $(-1,0)$.

    d) Desde el punto $(1,1)$ crece en la dirección $(0,1)$

Campos, diferencial y regla de la cadena

28. Para cada una de los siguientes campos, calcular $DF(P)$ para $P \in Dom(F)$.

    a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$

    b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

    c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$

    d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(X) = \|X\|^2$

29. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $F(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$.

    a) Calcular la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ asociada a F.

    b) Calcular la matriz de la diferencial $DF(P)$ para $P \in \mathbb{R}^2$. Verificar que es la misma matriz que la hallada en (a), *para todo P*. Concluir que "las transformaciones lineales tienen diferencial constante".

30. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

    (a) $F(x, y) = G(f(x)g(y), f(x)h(y))$ (b) $F(x, y) = G(x^y, y^x)$ $(x, y > 0)$

    (c) $F(x, y) = G(x, G(x, y))$ (d) $F(x, y) = f(x)^{g(y)}$ $(f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R})$

31. Coordenadas polares: Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Sea

$$g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)).$$

Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ en términos de f y sus derivadas parciales.

32. Coordenadas esféricas: Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sean

$$x = r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), \quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), \quad z = r\cos(\phi)$$

y sea $g(r, \theta, \phi) = f(x, y, z)$. Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \phi}$.

33. Coordenadas cilíndricas: Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Si $g(r, \theta, z) = f(x, y, z)$, calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}$.

34. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x, y) = f(e^{y^2+x}, \mathrm{sen}(2xy))$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que $f(1, 0) = 11$ y que $\nabla f(1, 0) = (8, -4)$, calcular $\nabla g(0, 0)$.

35. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 que satisface

$$f(e^{x-3} - 3, y^3 - x) = 2 + y^2.$$

    a) Evaluando en $(x, y) = (3, 1)$, calcular $f(-2, -2)$.

b) Calcular $\nabla f(-2,-2)$.

c) Calcular la derivada direccional de f en el punto $P = (-2,-2)$ en la dirección de $V = (4/5, -3/5)$.

36. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Supongamos que $g(1,2) = 4$, $\nabla f(-1,3,4) = (1,2,-1)$, y además

$$f(x-y, x^2+y, g(x,y)) = x - y \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Hallar $\dfrac{\partial g(1,2)}{\partial(4/5,-3/5)}$.

37. Dadas $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (x^2+y+x-2, x-3)$ y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$(F \circ G)(x,y) = (xy + 2y + 3x, x - 2y).$$

a) Hallar $P = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ de manera tal que $F(a,b) = (0,0)$.

b) Ver que ese P es único y con eso probar que $G(0,0) = (a,b)$.

c) Calcular $DG(0,0)$.

38. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 que verifica

$$f(y, e^{x-3y} + y) = (xy, 3)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Hallar x e y adecuados para poder calcular $f(1,2)$.

b) Calcular $Df(1,2)$.

39. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 que verifica

$$F(-2x^2 + 3y, e^{x-2} + 3) = \left(x^3 - \frac{y^2}{2}, 3y\right)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Hallar x e y adecuados para poder calcular $F(10,4)$.

b) Calcular $DF(10,4)$.